

Επαναληπτικό Τεστ στα Κεφάλαια 3-4 Μιγαδικές Συναρτήσεις I

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in \mathbb{C}$ ως προς την μιγαδική διαφορισιμότητα.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = x^3 + xy^2 - i(x^2y + y^3)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Εξετάστε την f ως προς την \mathbb{R} -διαφορισιμότητα και τη \mathbb{C} -διαφορισιμότητα.

Θέμα 3

Έστω τόπος $D \subseteq \mathbb{C}$ και ολόμορφη συνάρτηση $f: D \rightarrow \mathbb{C}$. Αν η $(3 - 2i) \cdot \bar{f}$ είναι ολόμορφη στο D δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 4 (Ανεξάρτητα ερωτήματα)

- (i) Να αναπτύξετε τη συνάρτηση $f(z) = \cos(z^2 - 1)$, $z \in \mathbb{C}$ σε δυναμοσειρά γύρω από το σημείο $z_0 = 0$.
- (ii) Αν η συνάρτηση $f(z) := \frac{\sin(z^2 - i)}{\cos(z + i)}$ έχει ανάπτυγμα Taylor στο $z_0 = -i$ ποια η ακτίνα σύγκλισης αυτής; Εξηγήστε το γεωμετρικά.
- (iii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: D(0, 4) \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} z^n \right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n 2^{-2n} z^n \right]$$

είναι καλά ορισμένη και ολόμορφη στο δίσκο $D(0, 4)$. Επίσης, να υπολογίσετε την παράγωγο της f σε κάθε σημείο του $D(0, 4)$.

- (iv) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$\cosh^2(iz) + \sinh^2(iz) = 1.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!